
MODELOS DINÁMICOS (ALEATORIOS) EN LA ACTIVIDAD EMPRESARIAL APLICACIÓN AL CÁLCULO DE UN ÍNDICE DE PÉRDIDAS POR CATÁSTROFES PARA LA INDUSTRIA ASEGURADORA

MARÍA JOSÉ PÉREZ-FRUCTUOSO

Universidad a Distancia de Madrid (UDIMA)

La Dinámica de Sistemas es un método que permite construir modelos complejos para estudiar el comportamiento y las consecuencias, a través del tiempo, de las múltiples interacciones de los elementos del sistema que se representa. La aplicación de esta metodología a las ciencias sociales resulta por tanto evidente al ser de gran utilidad para analizar fenómenos sociales en los

que intervienen gran cantidad de variables, que pueden estar o no correlacionadas, sometidos además a la acción de factores externos cambiantes a lo largo del tiempo (Aracil, 1978). Los primeros desarrollos de esta disciplina se realizaron en los años 50 por el ingeniero Jay Wright Forrester. Forrester aplicó la teoría de control y realimentación de la Ingeniería Automática a otras áreas como la organización y las ciencias sociales, mediante una sencilla metáfora hidrodinámica para la representación de un sistema, abstractando las ecuaciones diferenciales que define un sistema no lineal.

En los últimos años, las ecuaciones diferenciales estocásticas se han utilizado mucho para modelar la dinámica de sistemas sometidos a perturbaciones externas, consideradas como un efecto inevitable y molesto de un sistema real. Una de sus principales aplicaciones se ha producido en el campo de la economía financiera para modelar, por ejemplo, el comportamiento de los activos derivados. Dentro de

la industria aseguradora, se han replicado los modelos utilizados en finanzas para dar solución a la cobertura de riesgos tales como el catastrófico de difícil gestión. En esta línea, las pérdidas aseguradas derivadas de la ocurrencia de sucesos de naturaleza catastrófica a nivel mundial han aumentado considerablemente en los últimos años. Sólo en el año 2014 se produjeron 189 eventos que dieron lugar a un total de 25.800 millones de euros (aproximadamente unos 28.000 millones de dólares) en pérdidas aseguradas (Swiss Re, 2015) y las proyecciones realizadas por los expertos indican un aumento de estos riesgos hasta máximos históricos de 40.000 millones de euros para los próximos años (Swiss Re, 2007).

Tradicionalmente, el reaseguro ha sido el mecanismo utilizado por el sector asegurador para cubrir este tipo de riesgos, pero ante la falta de capacidad de este mercado en los últimos años, han aparecido instrumentos de transferencia y financiación alternativa de riesgos vinculados a los mercados de ca-

pital. La principal característica de estos instrumentos de transferencia alternativa de riesgos es que tanto el momento como el importe total de las indemnizaciones dependen de un índice de pérdidas que actúa como subyacente o desencadenante de tales pagos y cuya naturaleza es aleatoria ya que a priori, cuando se contrata la cobertura, ignoramos el número de catástrofes que van a producirse, su magnitud y los momentos de su ocurrencia así como el ritmo de declaración de los siniestros asociados. La calidad de estos índices, y por tanto su efectividad en las operaciones de transferencia de riesgos a los mercados de capital, depende de muchos factores (Pérez-Fructuoso, 2012) de entre los cuales cabe destacar, por su importancia, la simplicidad de su definición y de los modelos matemático-estadísticos utilizados para su cálculo.

Una revisión exhaustiva de la literatura financiero-actuarial sobre el comportamiento del índice de pérdidas subyacente de los activos derivados vinculados a seguros pone de manifiesto el uso frecuente del movimiento geométrico browniano para representar su dinámica (ver por ejemplo, Cummins y Geman, 1995, Geman y Yor, 1997, Aase 1999 y 2001, o más recientemente Zong-Gang y Chao-Qun, 2013 y Lai, Parcollet y Lamond, 2014). Asumir esta hipótesis implica considerar que la declaración de siniestros instantánea crece, en promedio, de forma exponencial mientras que la evidencia empírica muestra que dicha siniestralidad instantánea tiende a ser uniforme en el tiempo. Para resolver estas inconsistencias, Pérez-Fructuoso (2008 y 2009), partiendo del análisis empírico de la evolución de las declaraciones de siniestros después de suceder una catástrofe, propone un modelo matemático para calcular la componente aleatoria de la ratio de siniestralidad subyacente de esta clase de activos derivados. Esto es, un sistema específicamente dirigido a cuantificar la suma total de las pérdidas a lo largo de un periodo determinado como consecuencia del acaecimiento de grandes catástrofes. La característica distintiva principal del modelo que propone la autora es la consideración de una nueva variable, denominada cuantía de siniestros pendiente de declarar frente a los enfoques ya existentes, que sólo consideran en su sistematización la cuantía de siniestros ya declarada. De esta forma, cuando se produce una catástrofe, su volumen total es la suma de estas dos cuantías, cuantía declarada de siniestros y cuantía de siniestros pendiente de declarar.

La siniestralidad instantánea se representa mediante una ecuación diferencial que describe un crecimiento de las declaraciones de siniestros proporcional a la cuantía de siniestros pendiente de declarar en cada momento a razón de la tasa de declaración de siniestros. La aleatoriedad se incorpora perturbando dicha tasa de declaración con un ruido blanco, o diferencial del proceso de Wiener (Ikeda y Watanabe, 1989). De este modo, la tasa de declaración de siniestros queda configurada como un proceso estocástico con trayectorias continuas, y la cuantía de si-

niestros pendiente de declarar se representa a través de una tendencia constante perturbada en cada momento por la variancia que incorpora el proceso de Wiener. La cuantía declarada de siniestros resulta de la diferencia entre el volumen total de la catástrofe y la cuantía de siniestros pendiente de declarar.

En este artículo se parte de este modelo inicial con el objetivo de desarrollar una expresión más precisa para el índice de pérdidas catastróficas. Para ello, tras presentar en las dos siguientes secciones una definición del índice y el modelo original desarrollado por Pérez-Fructuoso, se continuará desarrollando tres alternativas diferentes para dicho modelo. La primera alternativa se basa en considerar una expresión asintótica para la tasa de declaración de siniestros; la segunda añade al modelo original otro movimiento browniano para capturar mayor aleatoriedad en el comportamiento de la siniestralidad y por último, modelamos la dinámica de la declaración de siniestros mediante un proceso de Ornstein-Uhlenbeck. A continuación tras presentar los datos asociados a seis inundaciones ocurridas en diferentes regiones de la geografía española propensas a sufrir este tipo de eventos, se presentan los principales resultados alcanzados con la estimación de los parámetros de los modelos propuestos y la comparación de los mismos y, finalmente, se concluye.

DEFINICIÓN DE UN ÍNDICE DE PÉRDIDAS POR CATÁSTROFES †

Un índice de pérdidas por catástrofes se define como el cociente entre la cuantía total de pérdidas asociadas a una o varias catástrofes ocurridas a lo largo de un determinado periodo de tiempo, denominado periodo de riesgo, y declaradas hasta un momento posterior, y un valor constante cuya definición depende del tipo de índice utilizado (por ejemplo, podría ser el volumen de primas devengadas durante el periodo de riesgo para cubrir las pérdidas catastróficas asociadas o un valor constante para referir las pérdidas registradas a puntos de cotización del mercado),

$$L(T) = \frac{L(T^*)}{cte} = \frac{\sum_{j=1}^{N(T)} S_j(T^*)}{cte} \quad (1)$$

donde $L(T)$ es el valor del índice de pérdidas al final del periodo considerado y $L(T^*)$ es la cuantía total declarada de los siniestros, asociada a las catástrofes ocurridas durante el periodo de riesgo.

$L(T)$ es una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad depende de los siguientes factores:

- El número de catástrofes $N(T)$ que se producen durante el periodo de riesgo $[0, T]$.
- El momento del tiempo en el que se produce la catástrofe j , con $j = 1, 2, \dots, N(T)$ y $t_j \in [0, T]$

– La cuantía total de cada catástrofe K_j con $j=1, 2, \dots, N(T)$.

– El comportamiento del proceso de reclamaciones, $S_j(t)$, que representa la cuantía ya declarada en el momento t de la catástrofe j , con $j=1, 2, \dots, N(T)$, $T_j \in [t_j, T]$, y la condición de contorno $S_j(t) \leq K_j$.

Para llevar a cabo el desarrollo del modelo y obtener el valor definido en la ecuación (1) se asumen las siguientes hipótesis:

Hipótesis 1: Como es de sobras conocido en teoría de la probabilidad, un proceso de Poisson es un proceso estocástico que contabiliza el número de sucesos que se producen durante un determinado periodo de tiempo. Entonces, se asume que $N(T)$ es un proceso de Poisson,

$$N(T) \cong \text{Poiss}(\lambda)$$

donde $N(T)$ es el número medio de sucesos catastróficos para el periodo $[0, T]$.

Hipótesis 2: El tiempo entre dos sucesos diferentes en un proceso de Poisson sigue una distribución exponencial con el mismo parámetro. Por tanto, para llevar a cabo la modelización se considera que:

$$t_{j+1} - t_j \cong \text{Exp}(\lambda)$$

Hipótesis 3: Se define la variable aleatoria continua K_j , que representa la cuantía total de la catástrofe j , como la suma de dos variables aleatorias (Pérez-Fructuoso, 2008 y 2009),

$$K_j = S_j(t) + R_j(t)$$

donde $R_j(t)$ es la cuantía de los siniestros asociados a la catástrofe j que en un momento t todavía está pendiente de declarar y $S_j(t)$ es la cuantía de los siniestros asociada a la misma catástrofe que se ha declarado hasta e incluido el momento t .

Entonces, a partir de la ecuación (2), la variable $S_j(t)$ puede escribirse como,

$$S_j(t) = K_j - R_j(t)$$

y el índice de pérdidas por catástrofes resulta:

$$L(T) = \frac{\sum_{j=1}^{N(T)} (K_j - R_j(T))}{cte} \quad (2)$$

MODELO ORIGINAL ↓

Para simplificar, se denota por K a la variable aleatoria cuantía total de la catástrofe ocurrida en el momento $t=0$ y se define como la suma de dos variables aleatorias, ambas referidas al momento de valoración t :

$$K = S(t) + R(t) \quad (3)$$

A partir de la evidencia empírica, se considera que, inmediatamente después de la ocurrencia de la catástrofe, la intensidad del proceso de declaración de siniestros es elevada y va decreciendo con el tiempo hasta anularse cuando ya no quedan más siniestros pendientes de declarar. Como consecuencia de ello, en la formalización original del modelo, se representa la siniestralidad instantánea a través de una ecuación diferencial cierta que describe un crecimiento de la cuantía de siniestros declarada proporcional a la variable cuantía de siniestros pendiente de declarar,

$$dS(t) = \alpha R(t) dt \quad (4)$$

donde α es una constante denominada tasa instantánea de declaración de siniestros.

Diferenciando la ecuación (3), resulta,

$$dS(t) = dR(t) dt \quad (5)$$

y sustituyendo en la ecuación (4), $dS(t)$ por el resultado obtenido en la expresión (5), se obtiene la ecuación diferencial cierta que describe la evolución de la cuantía de siniestros pendiente de declarar, $R(t)$, variable fundamental en el proceso de modelación, como:

$$dR(t) - \alpha R(t) dt \quad (6)$$

Para capturar el comportamiento irregular de las declaraciones de siniestros en el tiempo, se introduce un proceso de Wiener (movimiento browniano) en la ecuación (6), proporcional a la cuantía de siniestros pendiente de declarar, $\sigma R(t)$, dando lugar a la ecuación diferencial estocástica,

$$dR(t) - \alpha R(t) dt + \sigma R(t) dW_t \quad (7)$$

con las siguientes condiciones de contorno:

(a) Si $t=0$ entonces $R(t)=K$. En el momento en el que se produce la catástrofe la cuantía de siniestros pendiente de declaración coincide con el volumen total de la catástrofe.

b) Si $t \rightarrow \infty$, entonces $R(t)=0$. Si consideramos un momento del tiempo lo suficientemente alejado de la ocurrencia de la catástrofe, las pérdidas asociadas a la misma ya se han declarado en su totalidad, y por tanto ya no queda ningún siniestro pendiente de declarar.

El proceso de Wiener recoge las diferencias en la intensidad de declaración de siniestros ya que se considera que cada catástrofe tiene características propias no explicitadas en el modelo. Sin embargo, perturbar la tasa de declaración de siniestros con un ruido blanco amplificado por σ puede dar lugar a valores de dicha tasa negativos, lo que provocaría un crecimiento temporal de la cuantía de siniestros pendiente de declarar, $R(t)$, debido a la variación inversa definida para dicha variable. Esto puede suceder cuando, después de realizadas las declaraciones de siniestros, la tasación de los peritos dé lugar a valoraciones de pérdidas inferiores a las estimadas inicial-

mente. Por ello, la incorporación de la aleatoriedad mediante un proceso de Wiener únicamente es válida para valores de α tales que la probabilidad de que la cuantía de siniestros pendiente de declarar sea creciente, es prácticamente despreciable.

Para resolver la ecuación (7) es necesario aplicar el cálculo de Itô a la transformación $y = \ln R(t)$ (Arnold, 1974) y considerar las condiciones de contorno (a) y (b). Entonces, la solución a la ecuación diferencial estocástica (7) resulta:

$$R(t) = \exp\left[-\left(\alpha + \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right] \quad (8)$$

Dado que, en este caso, la distribución de la cuantía de siniestros pendiente de declarar, $R(t)$, depende de la distribución de probabilidad de la cuantía de la catástrofe K , si se considera que dicha cuantía es un valor constante, la variable $R(t)$ seguirá una distribución lognormal, siendo su distribución normal asociada:

$$N\left(\ln K - \left(\alpha + \frac{\sigma^2}{2}\right)t; \sigma^2 t\right) \quad (9)$$

El índice de pérdidas por catástrofes definido en la sección anterior, bajo estas hipótesis y utilizando la expresión (8) para $R(t)$, resulta:

$$L(T) = \sum_{j=1}^{N(T)} K_j \left(1 - \exp\left[-\left(\alpha + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t_j) + \sigma W_{T-t_j}\right]\right) \quad (10)$$

MODELOS DESARROLLADOS A PARTIR DEL MODELO ORIGINAL

En esta sección se desarrollan tres modelos tomando como base el modelo original. Para ello se cambian o añaden algunos parámetros para obtener una mejor expresión para la variable $R(t)$ de forma que refleje más fielmente el proceso de declaración de siniestros.

Modelo asintótico

El objetivo de este modelo es encontrar una aproximación más exacta del ritmo de declaración siniestral dando una definición alternativa a la tasa de declaración de siniestros representativa del mismo. Para ello, en lugar de considerar α constante como en el modelo original, se supone que esta tasa tiende en el tiempo a alcanzar un valor constante, esto es, al principio del proceso de declaración de siniestros, α se inicia en cero y crece hasta que alcanza el valor constante. La tasa de declaración de siniestros se convierte, entonces, en la siguiente función exponencial,

$$\alpha_t = \gamma \left(1 - e^{-\beta t}\right) \text{ con } \gamma > 0 \text{ y } \beta > 0$$

que depende del tiempo y tiende al valor constante γ cuando la $t \rightarrow \infty$.

Substituyendo α por α_t en la ecuación (7) del modelo original, se obtiene la ecuación diferencial estocástica descriptiva de la dinámica de la variable $R(t)$ en este modelo,

$$dR(t) = -\alpha R(t) dt + \sigma R(t) dW_t = -\gamma \left(1 - e^{-\beta t}\right) R(t) dt + \sigma R(t) dW_t \quad (11)$$

cuya solución, aplicando el cálculo de Itô a la función $y = \ln R(t)$, viene dada por la siguiente expresión:

$$R(t) = K \exp\left\{-\left(\gamma + \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \frac{\gamma}{\beta} \left(1 - e^{-\beta t}\right) + \sigma W_t\right\} \quad (12)$$

Como sucede en el modelo original, si se considera que la cuantía de la catástrofes es un valor constante, la variable $R(t)$ seguirá una distribución lognormal, siendo su distribución normal asociada:

$$\ln R(t) \approx N\left(\ln K - \left(\gamma + \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \frac{\gamma}{\beta} \left(1 - e^{-\beta t}\right); \sigma^2 t\right) \quad (13)$$

El índice de pérdidas por catástrofes definido en la sección 2, bajo estas hipótesis y utilizando la expresión (12) para determinar la variable $R(t)$, resulta:

$$L(T) = \sum_{j=1}^{N(T)} K_j \left(1 - \exp\left[-\left(\gamma + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t_j) + \frac{\gamma}{\beta} \left(1 - e^{-\beta(T-t_j)}\right) + \sigma W_{T-t_j}\right]\right) \quad (14)$$

Modelo con dos procesos de Wiener

Una de las cuestiones más difíciles de reflejar en un modelo matemático es la aleatoriedad de los procesos que queremos modelar. Tomemos el caso de la volatilidad, por ejemplo, cuyo comportamiento real es complicado de estudiar o predecir puesto que depende de muchos factores, en su mayor parte incontrolables. En el modelo que se desarrolla a continuación se va a tratar de añadir más volatilidad a la que presenta el modelo original. Para ello, se introduce otro proceso Wiener, que se simboliza como \bar{W}_t , a la ecuación diferencial estocástica (7) y se supone, además, que presenta una correlación positiva, $\rho \in [0,1]$ con el primer proceso de Wiener W_t . De esta forma, $dW_t \bar{W}_t = \rho dt$ y el proceso de Itô o ecuación diferencial estocástica que describe la dinámica del modelo se convierte en:

$$dR(t) = -\alpha R(t) dt + \sigma_1 R(t) dW_t + \sigma_2 R(t) d\tilde{W}_t \quad (15)$$

Aplicando de nuevo el cálculo de Itô y desarrollando un polinomio de Taylor para la función $y = \ln R(t)$, cuando $dt \rightarrow 0$, la solución de la variable cuantía de siniestros pendiente de declarar en este caso resulta:

$$R(t) = K \exp \left(- \left(\alpha + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \sigma_1 \sigma_2 \rho \right) t + \sigma_1 W_t + \sigma_2 \tilde{W}_t \right) \quad (16)$$

En este modelo se ha de tener en cuenta que la distribución normal asociada al proceso W_t , está correlacionada con la distribución normal asociada al proceso \tilde{W}_t , por tanto los parámetros de la distribución normal que sigue la variable $\ln R(t)$ son:

$$\ln R(t) \approx N \left(\ln K - \left(\alpha + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \sigma_1 \sigma_2 \rho \right) t; \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 \right) t \right) \quad (17)$$

Si $\rho = 1$, la correlación entre los dos procesos de Wiener es perfecta por lo que son totalmente dependientes, entonces $W_t = \tilde{W}_t$ y se obtiene el modelo original (7) con $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$.

Finalmente, el índice de pérdidas por catástrofes definido en la sección 2, bajo estas hipótesis y utilizando la expresión (16) para $R(t)$, resulta:

$$L(T) = \sum_{j=1}^{N(T)} K_j \left(1 - \exp \left(- \left(\alpha + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \sigma_1 \sigma_2 \rho \right) (T - t_j) + \sigma_1 W_{T-t_j} + \sigma_2 \tilde{W}_{T-t_j} \right) \right) \quad (18)$$

Modelo de Ornstein-Uhlenbeck

En el modelo original, cuando se incorpora la irregularidad en el comportamiento de las declaraciones de siniestros en el tiempo, se asume que su intensidad es proporcional a la cuantía de siniestros pendiente de declarar y esta circunstancia se representa mediante un movimiento Browniano geométrico.

Sin embargo, también parece lógico pensar que la irregularidad de la intensidad en la declaración de los siniestros es constante en el tiempo y por tanto no depende de la cuantía de siniestros pendiente de declarar. Este hecho queda reflejado introduciendo un proceso de Wiener en la ecuación (4) mediante un movimiento Browniano aritmético, en lugar de uno geométrico, dando lugar a la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dR(t) = -\alpha R(t) dt + \sigma dW_t \quad (19)$$

Este tipo de proceso, se conoce como proceso de Ornstein-Uhlenbeck y su solución, obtenida aplicando el cálculo de Itô (Malliaris y Brock, 1999), resulta:

$$R(t) = Ke^{-\alpha t} + \sigma e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} dW_s \quad (20)$$

$R(t)$ es un proceso Gaussiano y por tanto sigue una distribución normal de parámetros:

$$R(t) \approx N \left(Ke^{-\alpha t}, \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}) \right) \quad (21)$$

El índice de pérdidas por catástrofes definido en la sección 2, bajo estas hipótesis y utilizando la expresión (20) para $R(t)$, resulta:

$$L(T) = \sum_{j=1}^{N(T)} K_j \left(1 - e^{-\alpha(T-t_j)} - \sigma e^{-\alpha(T-t_j)} \int_0^{(T-t_j)} e^{\alpha s} dW_s \right) \quad (22)$$

ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS DE LOS MODELOS PROPUESTOS

Para validar los cuatro modelos teóricos de determinación de un índice de pérdidas por catástrofes, se estiman todos los parámetros que en ellos aparecen, a partir de los datos recogidos en el cuadro 1, en la página siguiente, sobre el porcentaje de siniestros pendiente de declarar, acumulado semanalmente, en 6 inundaciones ocurridas en distintas regiones de España en las que este tipo de sucesos se producen con elevada frecuencia: Alcia (01/10/1991), San Sebastián (23/06/1992), Barcelona (14/09/1999), Zaragoza (20/10/2000), Valencia (20/10/2000) y Murcia (20/10/2000):

Modelo Original

La dinámica del modelo original se define a partir de la ecuación diferencial estocástica (7) cuya solución para $R(t)$, dada por la ecuación (8), resulta en una variable aleatoria que sigue una distribución lognormal, de forma que,

$$X(t) = -\ln \frac{R(t)}{R(t-1)} \sim N \left(\alpha + \frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2 \right)$$

con $E[R(t)] = Ke^{-\alpha t}$.

Sin embargo, considerando las propiedades de la distribución normal así como las características de los datos disponibles, es posible obtener una expresión más apropiada para obtener los estimadores de los parámetros del modelo analizado, α y σ , a partir

CUADRO 1
PORCENTAJE DE SINIESTROS PENDIENTES DE DECLARAR ASOCIADOS A SEIS INUNDACIONES
OCURRIDAS EN ESPAÑA

Semana	Alcira	San Sebastián	Barcelona	Zaragoza	Valencia	Murcia
0	100,0	100	100	100	100	100
1	84,94	88,08	90,68	60,11	97,54	88,46
2	53,65	36,04	68,38	56,91	80,18	75,55
3	34,96	23,67	50,68	38,3	60,15	48,7
4	24,05	16,68	41,42	29,79	43,16	31,13
5	18,86	12,29	31,58	23,4	31,96	21,41
6	13,36	9,94	25,43	19,15	27,55	15,78
7	10,53	8,72	19,56	18,09	19,54	11,27
8	8,04	7,76	16,68	15,43	15,29	8,71
9	6,94	6,8	13,28	15,43	14,76	8,24
10	5,23	5,78	10,54	10,64	14,7	6,57
11	4,08	5,18	8,15	6,91	11,06	5,36
12	3,71	4,33	6,8	3,72	8,46	4
13	3,56	3,45	6,13	3,72	6,98	3,38
14	2,6	2,69	3,41	2,66	6,21	2,6
15	1,75	1,81	3,41	2,66	5,17	2,8
16	1,3	1,59	2,61	1,6	4,22	2,29
17	0,77	1,39	1,81	1,6	3,5	2,25
18	0,29	1,16	1,26	1,6	2,72	2,14
19	0,0	0,96	0,56	0	2,26	1,67
20		0,76	0,0		1,88	1,28
21		0,45			1,69	1,09
22		0,28			1,61	0,93
23		0,2			0,9	0,66
24		0,17			0,54	0,66
25		0,11			0,36	0,62
26		0,06			0,19	0,16
27		0,0			0,0	0,0

FUENTE: Departamento Técnico y de Reaseguro del Consorcio.

CUADRO 2
ESTIMADORES PARA EL MODELO ORIGINAL

	\bar{X}	S^2	$\hat{\alpha}_{EMV}$
Alcira	0,324613586	0,0422098269	0,3035086722
San Sebastián	0,28533003	0,0351605321	0,2677497687
Barcelona	0,27289414	0,0311010319	0,2573436251
Zaragoza	0,22973148	0,0434054683	0,2080287412
Valencia	0,240099621	0,0257693877	0,2281115136
Murcia	0,24760583	0,068754683	0,2132287838

FUENTE: Elaboración propia.

de la cuantía de siniestros pendiente de declarar en t y en $t-1$. A partir de ella, si se define la variable $X(t)$ como,

$$X(t) = -\ln \frac{R(t)}{R(t-1)} \sim N\left(\alpha + \frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2\right) \quad (23)$$

y se aplica sobre este resultado el método de estimación de máxima-verosimilitud, el estimador de la tasa de declaración de siniestros resulta,

$$\hat{\alpha}_{EMV} = \bar{X} - \frac{(\hat{\sigma}^2)_{EMV}}{2} \quad (24)$$

donde $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X(t)$ y $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (X(t) - \bar{X})^2$ son, respectivamente, la media y la varianza muestrales. La varianza muestral ha sido estimada a través de la cuasi-varianza muestral, ya que esta última es un estimador insesgado de la primera:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (X(t) - \bar{X})^2 \quad (25)$$

El valor de los estimadores de los parámetros en el modelo original se muestran en el cuadro (2).

Modelo asintótico

La ecuación fundamental del modelo asintótico propuesto viene dada por la expresión (12). Entonces, aplicando el mismo procedimiento que en el modelo original, se obtiene una expresión más apropiada para calcular los estimadores de los parámetros γ , β y σ , a partir de la cuantía de siniestros pendiente de declarar en t y en $t-1$ y definiendo la variable $X(t)$ como sigue:

$$X(t) = -\ln \frac{R(t)}{R(t-1)} \sim N\left(\left(\gamma + \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\gamma}{\beta}(1 - e^{-\beta})\right)e^{-\beta}, \sigma^2\right) \quad (26)$$

CUADRO 3
ESTIMADORES PARA EL MODELO ASINTÓTICO

	$\hat{\gamma}_{MCO}$	$\hat{\beta}_{MCO}$	$\hat{\sigma}_{MCO}$
Alcira	0,3113665692	2,4706387578	0,0422098269
San Sebastián	0,2714320247	3,5470277486	0,28533003
Barcelona	0,2691828454	1,2703570356	0,0311010319
Zaragoza	0,2080182736	ψ*	0,0434054683
Valencia	0,238730593	1,0160837493	0,0257693877
Murcia	0,2191557622	1,5431850993	0,0687540979

* La inundación ocurrida en Zaragoza presenta unas características diferentes al resto de inundaciones analizadas. El proceso de declaración de siniestros se vio alterado por la ocurrencia, inmediatamente después de la catástrofe original, de otras inundaciones de menor intensidad que condicionaron los datos disponibles. Por esta razón se producen mayores errores en las estimaciones realizadas sobre los datos reales y < al calcular $\hat{\gamma}_{MCO}$ y $\hat{\beta}_{MCO}$ para diferentes semillas, obtenemos siempre el mismo valor de $\hat{\gamma}_{MCO}$ (las diferencias tienen un orden de 10^{-4}) para diferentes valores de $\hat{\beta}_{MCO}$ ($\hat{\beta} \in (70,400)$). Esto significa que el parámetro β no influye en los resultados, y por tanto asumimos que $\alpha(t)$ como en el modelo original.

FUENTE: Elaboración propia.

Para estimar la varianza, se utiliza la cuasi-varianza dada por la expresión (25). Sin embargo, en este caso, para estimar la media de $X(t)$ no es posible utilizar el método de máxima-verosimilitud porque dicha media no es un valor constante. La estimación de los parámetros γ y β se va a realizar, entonces, aplicando la metodología de mínimos cuadrados ordinarios, esto es, los estimadores serán aquellos valores de γ y β que minimizan la diferencia entre la media y todas las observaciones disponibles.

Para resolver este problema de optimización se utiliza la rutina *fsolve* del programa Matlab. Esta rutina encuentra la solución (γ^*, β^*) y para el sistema de ecuaciones que resulta de aplicar la condición necesaria de optimalidad al problema de minimización anterior, utilizando un método numérico que se inicia con una semilla (γ_0, β_0) que nosotros introducimos en el programa.

La semilla se define teniendo en cuenta que γ^* debe ser positivo y con un valor relativamente cercano al obtenido en el modelo original, de forma que $0,1 \leq \gamma^* \leq 0,8$. Por otro lado, β^* también debe ser positivo y no muy elevado porque en otro caso la función $\alpha_t = \gamma(1 - e^{-\beta t})$ sería un valor constante como en el modelo original. Por tanto, $0,1 \leq \beta^* \leq 5$. Considerando estos dos factores, se define el dominio de nuestra semilla como,

$$(\gamma_0, \beta_0) \in (0, 1; 0, 8) \times (0, 1; 5)$$

y se garantiza que los valores obtenidos minimizan la función $f(\gamma, \beta)$ independientemente de la semilla seleccionada, introduciendo en la rutina de Matlab diferentes semillas pertenecientes al dominio.

Los resultados de la estimación de los parámetros para el modelo asintótico en cada una de las series de datos analizadas se muestran en el cuadro 4.

Modelo con dos procesos de Wiener

En este modelo, operando del mismo modo que en los modelos anteriores, con los valores de la cuantía

de siniestros pendiente de declarar en t y en $t-1$, obtenemos la siguiente expresión para la variable aleatoria $X(t)$:

$$X(t) = -\ln \frac{R(t)}{R(t-1)} \approx N \left(\alpha + \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2} + \sigma_1 \sigma_2 \rho, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1 \sigma_2 \rho \right) \quad (27)$$

Los estimadores en este modelo son la cuasi-varianza definida en (25) para estimar σ^2 y el estimador máximo-verosímil para la media como en (24), de forma que los estimadores en función del valor ρ resultan,

$$\hat{\alpha}_{EMV} = \bar{X} - \frac{2 - \rho^2}{2} S^2 \quad (28)$$

$$\hat{\sigma}_\rho^2 = (2 - \rho)^2 S^2 \quad (29)$$

$$\text{con } \sigma_\rho^2 = (\sigma_1 + \sigma_2)^2 \quad \forall \rho \in [0, 1]$$

Los valores de dichos estimadores para las 6 series analizadas se presentan en el cuadro 4, en la página siguiente.

Modelo de Ornstein-Uhlenbeck

En el modelo de Ornstein-Uhlenbeck, $R(t)$ sigue la distribución normal definida en la expresión (21). Entonces, para obtener una expresión cerrada de los estimadores de los parámetros tasa de declaración de siniestros y volatilidad, en este modelo, vamos a aplicar el método de máxima-verosimilitud de forma que obtenemos:

$$\hat{\alpha}_{EMV} = \ln \left[\frac{\sum_{j=1}^n (R(j-1))^2}{\sum_{j=1}^n R(j)R(j-1)} \right] \quad (30)$$

CUADRO 4
ESTIMADORES PARA EL MODELO CON DOS PROCESOS DE WIENER

Alicira				San Sebastián			
ρ	σ_1	σ_2	α	ρ	σ_1	σ_2	α
0	0,205450303	0,205450303	0,282403759	0	0,187511418	0,187511418	0,250169503
0,5	0,205450303	0,102725151	0,287679987	0,5	0,187511418	0,093755709	0,25456457
1	0,205450303	0	0,303508673	1	0,187511418	0	0,267749769
Barcelona				Zaragoza			
ρ	σ_1	σ_2	α	ρ	σ_1	σ_2	α
0,176354847	0,176354847	0,241793109	0,250169503	0	0,20833979	0,20833979	0,186326007
0,176354847	0,088177423	0,245680738	0,25456457	0,5	0,20833979	0,104169895	0,191751691
0,176354847	0	0,257343625	0,267749769	1	0,20833979	0	0,208028741
Valencia				Murcia			
ρ	σ_1	σ_2	α	ρ	σ_1	σ_2	α
0	0,160528465	0,160528465	0,215226819	0	0,262210027	0,262210027	0,178851735
0,5	0,160528465	0,080264232	0,218447993	0,5	0,262210027	0,131105013	0,187445997
1	0,160528465	0	0,228111513	1	0,262210027	0	0,213228784

FUENTE: Elaboración propia.

CUADRO 5
ESTIMADORES PARA EL MODELO DE ORNSTEIN-UHLENBECK

	$\hat{\alpha}_{EMV}$	$\hat{\sigma}_{EMV}^2$
Alicira	0,2990821063	16,3988925399
San Sebastián	0,3858518171	52,6399850026
Barcelona	0,2068640449	9,2310979432
Zaragoza	0,3385379521	28,6902771354
Valencia	0,1773690288	14,8410725629
Murcia	0,2297645911	14,3896476717

FUENTE: Elaboración propia.

$$\hat{\sigma}_{EMV}^2 = \frac{2\hat{\alpha}}{n(1 - e^{-2\hat{\alpha}})} \sum_{j=1}^n (R(j) - R(j-1)e^{-\hat{\alpha}})^2 \quad (31)$$

Los resultados para la estimación de los parámetros del modelo de Ornstein-Uhlenbeck en las seis inundaciones consideradas se muestra en el cuadro 5,

COMPARACIÓN DE LOS MODELOS †

En esta sección se va a realizar una comparación de los resultados de los modelos propuestos mediante el cálculo de las predicciones que se obtienen de cada uno de ellos. Notar que no se ha considerado el modelo desarrollado con dos procesos de Wiener porque da lugar a los mismos resultados que el modelo original.

Para ello, se obtiene en primer lugar la media de la distribución de cada modelo utilizando los parámetros estimados en cada uno de ellos y la definición de esperanza de una distribución lognormal en los modelos original y asintótico y la de una distribución normal en el modelo de Ornstein-Uhlenbeck.

A partir de las expresiones (8), (12) y (21), las esperanzas de los modelos original, asintótico y de Ornstein-Uhlenbeck, son, respectivamente:

$$E(R_1(t)) = K \exp(-\hat{\alpha}t)$$

$$E(R_2(t)) = K \exp\left(-\hat{\gamma}t + \frac{\hat{\gamma}^2}{\hat{\beta}}(1 - \exp(-\hat{\beta}t))\right)$$

$$E(R_3(t)) = K \exp(-\hat{\alpha}t)$$

A continuación se realiza un análisis gráfico de las predicciones y se realiza una discusión a partir de los errores que se producen en cada modelo.

En primer lugar se observa en la figura 1, en la página siguiente, los tres modelos aplicados a la inundación de Alicira y los errores de estimación.

El análisis gráfico de las series de datos real y estimadas en esta inundación pone de manifiesto que el modelo original y el modelo de Ornstein-Uhlenbeck dan lugar a los mismos resultados.

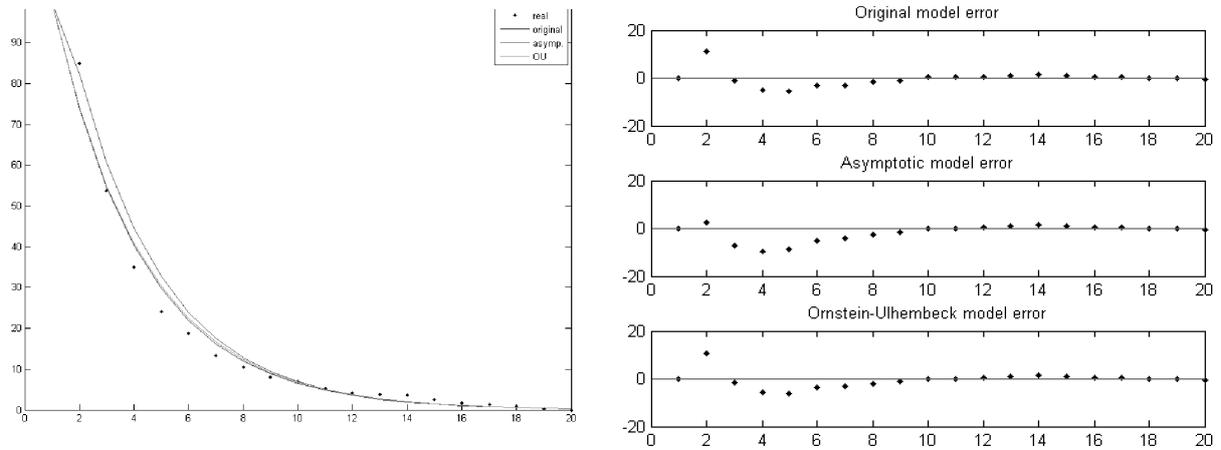
Analizando los errores en la figura 1, en la página siguiente, se deriva que, aunque el modelo asintótico ajusta mejor en la primera observación, con dicho modelo se obtienen peores resultados en el resto de datos.

Para la inundación de Alicira es posible concluir por tanto, que el modelo asintótico no se ajusta a los datos reales y que no existen diferencias significativas entre los ajustes realizados por los modelos original y de Ornstein-Uhlenbeck.

Las predicciones para la inundación de San Sebastián se muestran en la figura 2, en la página anterior.

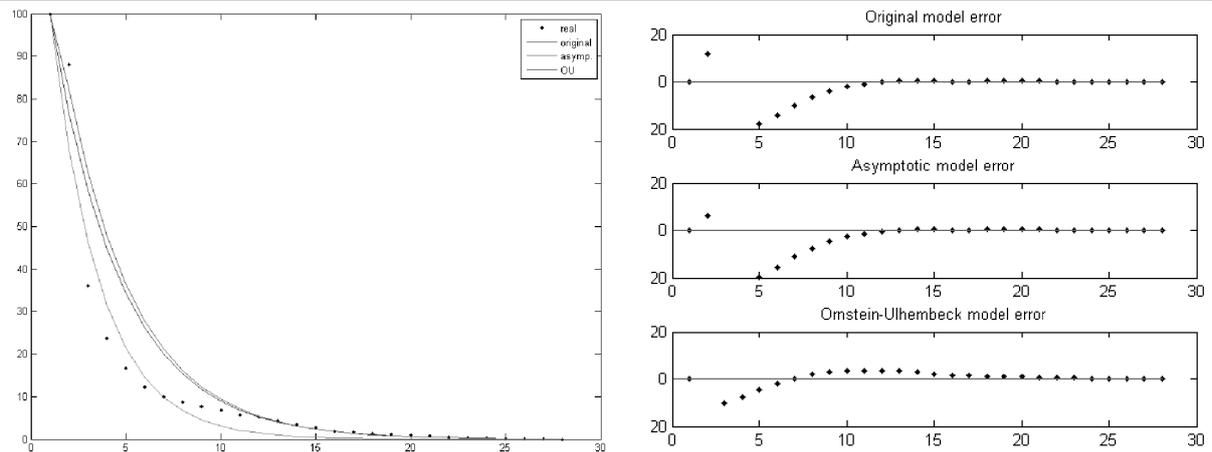
Como puede observarse, el modelo original y el asintótico dan lugar a muy malas predicciones para las primeras observaciones. Sin embargo, una vez más, el modelo de Ornstein-Uhlenbeck se ajusta mejor al principio del proceso de declaración, pero en las últimas semanas, resultan mejores predictores los otros

FIGURA 1
SERIE DE DATOS Y ERRORES SERIE DE DATOS ALCIRA



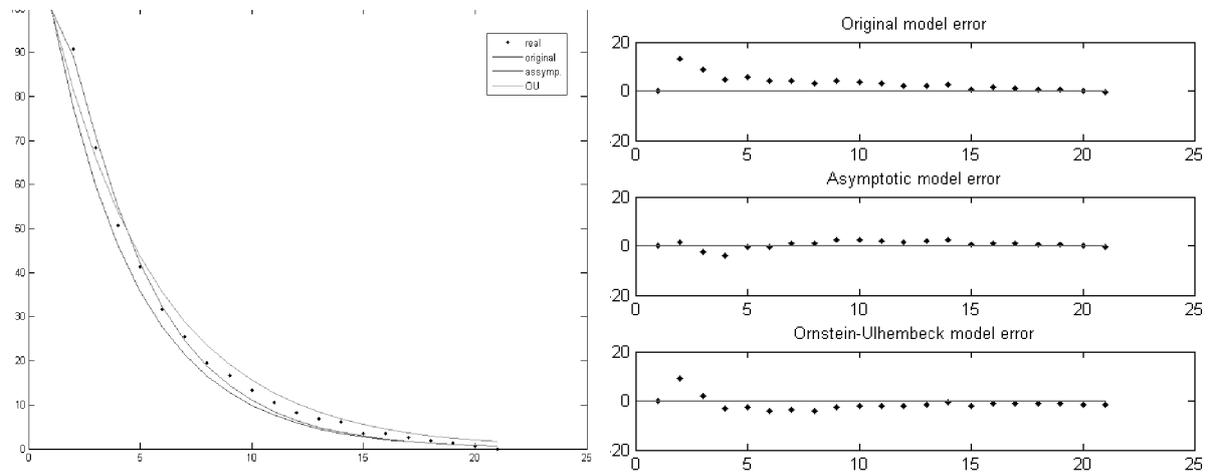
FUENTE: Elaboración propia.

FIGURA 2
SERIE DE DATOS Y ERRORES SERIE DE DATOS SAN SEBASTIÁN



FUENTE: Elaboración propia.

FIGURA 3
SERIE DE DATOS Y ERRORES SERIE DE DATOS BARCELONA



FUENTE: Elaboración propia.

dos modelos. En este caso, el modelo asintótico produce resultados muy parecidos al modelo original porque el valor del parámetro β está muy cercano a 3,5. Esto significa que la función exponencial alcanza el valor constante de la tasa de declaración de siniestros más rápido que para otros valores de b dando lugar a un modelo asintótico muy similar al modelo original.

Por su parte, los gráficos de errores mostrados en la figura 2, en la página anterior, señalan que la inundación de San Sebastián es la que peor se ajusta a cualquiera de los tres modelos propuestos y por tanto, la que mayores errores produce en las predicciones.

Las estimaciones de la serie de datos correspondiente a la inundación de Barcelona se muestran en la figura 3, en la página anterior.

Los resultados gráficos no permiten concluir cuál de los modelos se ajusta mejor a los datos. Sin embargo, observando la gráfica de errores en la figura 3, es posible darse cuenta de que el modelo asintótico es el que mejor se adapta a la realidad de los datos porque es el que presenta errores menores. Por su parte, el modelo de Ornstein-Uhlenbeck resulta también algo mejor que el modelo original. Se concluye por tanto, en este caso, que el modelo original es el que peor representa la declaración de siniestros asociada a la inundación de Barcelona.

La inundación de Zaragoza es un poco diferente a los demás inundaciones analizadas en este artículo. El proceso de reclamación asociado a la catástrofe original se vio alterado por la ocurrencia de otras pequeñas inundaciones que se produjeron inmediatamente después de la inicial lo que condicionó los datos disponibles. La figura 4, en la página siguiente, muestra las estimaciones realizadas para la inundación de Zaragoza, recordando que al no ser posible determinar el parámetro β para el modelo asintótico, éste coincide con el modelo original.

En cuanto al análisis de los errores, mostrados en la figura 4, se puede concluir fácilmente que la estimación derivada del modelo de Ornstein-Uhlenbeck se ajusta mejor en las primeras semanas, mientras que el modelo original se ajusta mejor al final del proceso de declaración de siniestros.

En la inundación ocurrida en Valencia, como puede observarse en la figura 5, en la página siguiente, sucede lo mismo que en la inundación de Barcelona; el análisis gráfico de las predicciones no permite concluir cuál de los modelos ajusta mejor.

Sin embargo, observando los gráficos de errores en la figura 5, de nuevo se observa que el modelo asintótico es el que mejor se ajusta a los datos y no es posible determinar si el modelo original es mejor que el Ornstein-Uhlenbeck o viceversa.

Finalmente, las estimaciones y los errores para la inundación de Murcia se muestran en la figura 6.

Como puede observarse, los tres modelos tienen el mismo comportamiento y no se ajustan bien a los

datos reales. En cualquier caso, el modelo de Ornstein-Uhlenbeck parece que es el más cercano a dicho datos.

Analizando los errores en las estimaciones para Murcia, éstos son mayores que los obtenidos en el resto de inundaciones analizadas. A pesar de ello, es posible concluir que el modelo de Ornstein-Uhlenbeck es el que produce menores errores en este caso mientras que el modelo asintótico es el peor para representar las declaraciones de siniestros asociadas a la inundación de Murcia, ya que presenta errores mayores que el modelo original.

Como el análisis gráfico no es concluyente para determinar cuál de los modelos propuestos es el que más se ajusta a la realidad de los datos que queremos representar, se calcula, a continuación, la raíz de la suma de los errores al cuadrado para cada modelo, a partir de la siguiente expresión,

$$RSCE = \sqrt{SCE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}$$

donde Y_i es el valor observado e \hat{Y}_i es el valor estimado.

Los valores de la RSCE se muestran en el cuadro 6, en páginas posteriores.

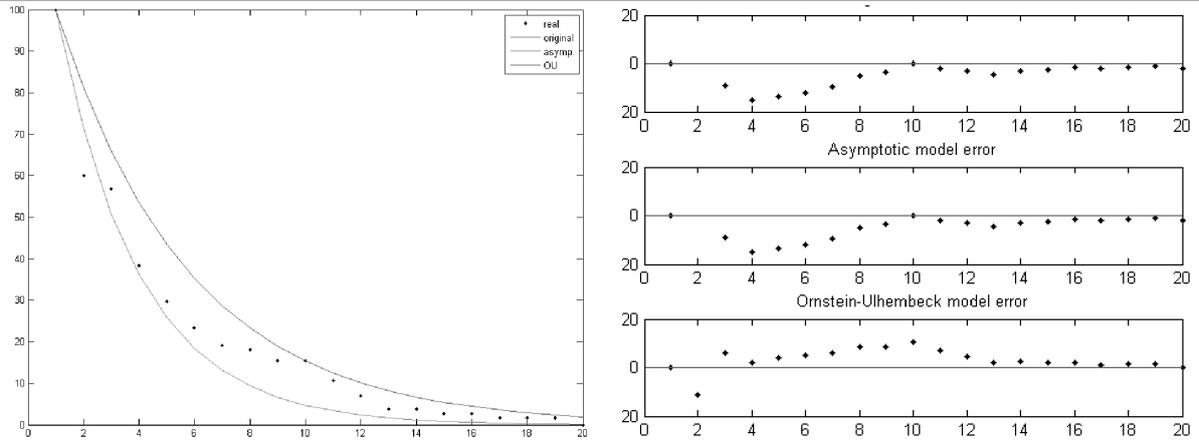
Los resultados obtenidos con el cálculo de la RSCE permiten extraer las siguientes conclusiones: el modelo de Ornstein-Uhlenbeck presenta unos errores menores para todas las inundaciones consideradas excepto para Alcira, en la que dicho modelo tiene un error ligeramente superior a los modelos original y asintótico, y para Barcelona y Valencia, en las que el error cometido por el modelo asintótico es ligeramente inferior. En los casos de San Sebastián, Zaragoza y Murcia, los errores cometidos con los modelos original y asintótico se reducen considerablemente al realizar el ajuste con el modelo de Ornstein-Uhlenbeck. Es posible concluir, por tanto, que el modelo de Ornstein-Uhlenbeck ajusta mejor que el modelo original y que el modelo asintótico la realidad de declaración de siniestros catastróficos que se quiere representar.

CONCLUSIONES

En este artículo, se desarrolla una aplicación de los modelos de dinámica empresarial, basada en la representación, mediante ecuaciones diferenciales estocásticas, de las variables que determinan el proceso de declaración de siniestros asociados a la ocurrencia de una catástrofe.

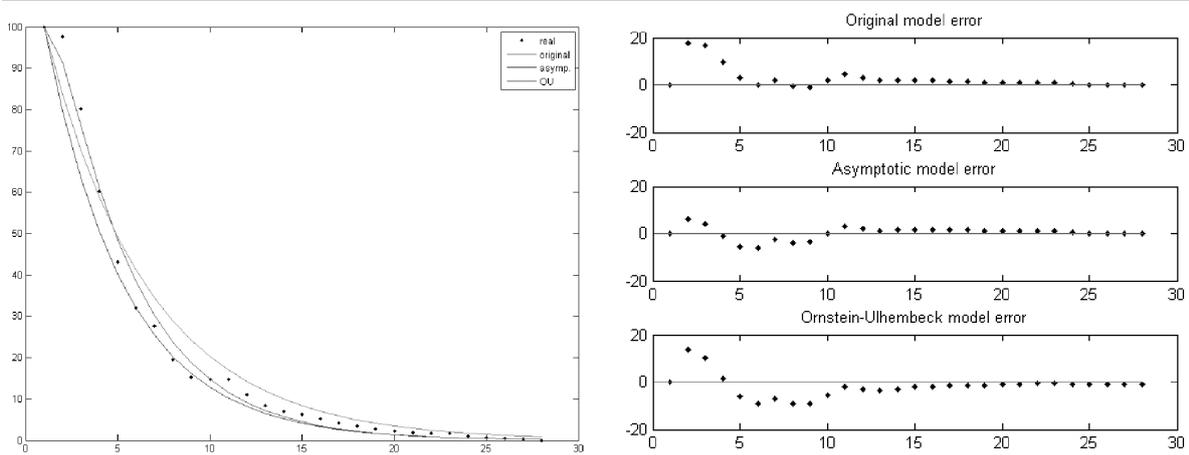
A partir de un modelo inicial presentado por Pérez-Fructuoso en 2008 y 2009, cuya aportación fundamental se basa en la definición de la dinámica de las declaraciones de siniestros creciente proporcionalmente a la cuantía de siniestros pendiente de declarar a razón de la tasa de declaración de siniestros.

FIGURA 4
SERIE DE DATOS Y ERRORES SERIE DE DATOS ZARAGOZA



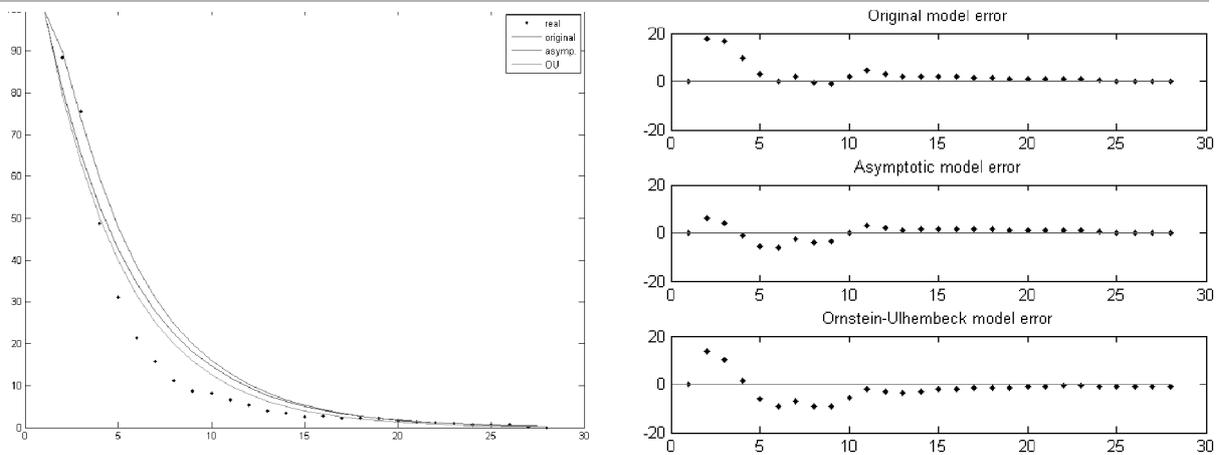
FUENTE: Elaboración propia.

FIGURA 5
SERIE DE DATOS Y ERRORES SERIE DE DATOS VALENCIA



FUENTE: Elaboración propia.

FIGURA 6
SERIE DE DATOS Y ERRORES SERIE DE DATOS MURCIA



FUENTE: Elaboración propia.

CUADRO 6
RSCE PARA CADA PREDICCIÓN

	RSCE Modelo Original	RSCE Modelo OU	RSCE Modelo asintótico
Alcira	3,2541320138	3,3478729786	3,7524090594
San Sebastián	7,926406564	4,9404532812	8,8122165948
Barcelona	4,3877716557	2,9974719773	1,7110578306
Zaragoza	8,0230716144	5,5091970335	8,024036408
Valencia	5,2483780645	5,0638737475	2,6079109831
Murcia	5,8600227682	4,9538378985	7,094248363
Media	5,7832970622	4,4687844861	5,3336456187

FUENTE: Elaboración propia.

tros, se desarrollan tres modelos alternativos en tiempo continuo para representar la evolución de la ratio de siniestralidad subyacente de los contratos de activos derivados vinculados a seguros. Estos modelos pretenden ser una alternativa a los modelos de valoración precedentes, que simplifiquen el proceso de obtención de la variable fundamental para la determinación de la ratio de siniestralidad considerada y la ajuste lo máximo posible a la realidad que se pretende representar.

En cuanto al análisis de los datos disponibles sobre inundaciones ocurridas en diferentes regiones de España propensas a sufrir este tipo de eventos, podemos concluir que de los tres modelos propuestos, el de Ornstein-Uhlenbeck es el que mejor se ajusta a la realidad de la declaración de siniestros catastróficos. Sin embargo, los resultados obtenidos también indican que el modelo asintótico ajusta muy bien los datos en las dos primeras semanas después de la ocurrencia de la inundación, lo que haría pensar en el desarrollo futuro de un nuevo modelo en el que se combinara un tasa de declaración de siniestros asintótica durante las dos primeras semanas y una tasa constante desde la tercera semana y hasta el final del proceso de declaración. De todos los modelos presentados, el original es el que presenta los peores resultados en la estimación para las inundaciones analizadas.

El desarrollo de los diferentes modelos propuestos pretende ser una aproximación a proceso real de declaración de los siniestros tras la ocurrencia de una catástrofe. Sin embargo, a pesar de que disponemos de muchas herramientas para desarrollar modelos que reproduzcan el proceso de siniestralidad real, se puede constatar que existen numerosos problemas cuando se comprueba la validez de los modelos propuestos. En este trabajo, ha sido posible construir todos los estimadores y, por tanto, realizar todas las predicciones lo que ha permitido concluir que el modelo de Ornstein-Uhlenbeck es el que mejor se ajusta a los datos procedentes de las seis inundaciones que han tenido lugar en España. Sin embargo cabe decir que los datos disponibles son muy específicos y concretos de una realidad determinada: las inundaciones españolas. Las consecuencias de una inundación en España están muy lejos de parecerse a las producidas por un huracán en Estados Unidos y la

ausencia de datos sobre dichos eventos no permite establecer si el modelo de Ornstein-Uhlenbeck sería el adecuado para representar sus declaraciones de siniestros o si por el contrario alguno de los otros modelos propuestos se adaptarían mejor a esa realidad.

BIBLIOGRAFÍA

- AASE, K. (1999). «An Equilibrium Model of Catastrophe Insurance Futures and Spreads». *Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, nº 24, pp. 69-96.
- AASE, K. (2001). «A Markov model for the pricing of catastrophe insurance futures and spreads». *Journal of Risk and Insurance*, 68 (1), 25-50.
- ARACIL, J. (1978). *Introducción a la dinámica de sistemas*. Alianza Editorial. Madrid.
- ARNOLD, L. (1974). *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- CUMMINS, J.D. y GEMAN, H. (1995). «Pricing Catastrophe Insurance Futures and Call Spreads: An Arbitrage Approach». *Journal of Fixed Income*, nº 4, pp. 46-57.
- GEMAN, H. y YOR, M. (1997). «Stochastic time changes in catastrophe option pricing». *Insurance: Mathematics and Economics*, nº 21, pp. 185-193.
- IKEDA, N. y WATANABE, S. 1989. *Stochastic differential equations and diffusion processes*. Second Edition, North-Holland/Kodansha.
- LAI, V.S.; PARCOLLET, M. y LAMOND, B.F. (2014). «The valuation of catastrophe bonds with exposure to currency exchange risk». *International Review of Financial Analysis*, nº 33, pp. 243-252.
- MALLIARIS, A.G. y BROCK, W. A. (1999). *Stochastic methods in economics and finance*. (Advanced Textbooks in economics). Elsevier Science. North-Holland
- PÉREZ-FRUCTUOSO, M. J. (2012). «La importación de los índices en la transferencia de riesgos del sector asegurador a los mercados de capital. Análisis de los índices de pérdidas por catástrofes en el ramo no-vida». *Revista Iberoamericana de Seguros*, vol. 37, nº 21, pp. 235-259.
- PÉREZ-FRUCTUOSO, M.J. (2009). «Elaborating a catastrophic loss index for insurance-linked securities (ILS) a continuous model». *Asian-Pacific Journal of Risk and Insurance*, vol. 3, nº 2, pp. 34-45.
- PÉREZ-FRUCTUOSO, M.J., (2008). «A continuous model to calculate the loss trigger index of a CAT Bond». *Variance*, vol. 2, nº 2, pp. 253-265.
- SWISS RE (2015). «Catástrofes naturales y siniestros antropogénos en 2014: las tormentas invernales y las tormentas convectivas generan la mayoría de los daños». *Sigma*, 2/2015.
- SWISS RE (2007). Market Loss Index for Europe. Expanding Capital Market Capacity. *Swiss Re Focus Report*.
- ZONG-GANG, M. Y CHAO-QUN, M. (2013). «Pricing catastrophe risk Bonds: a mixed approximation method». *Insurance: Mathematics and Economics*, nº 52, pp. 243-254.